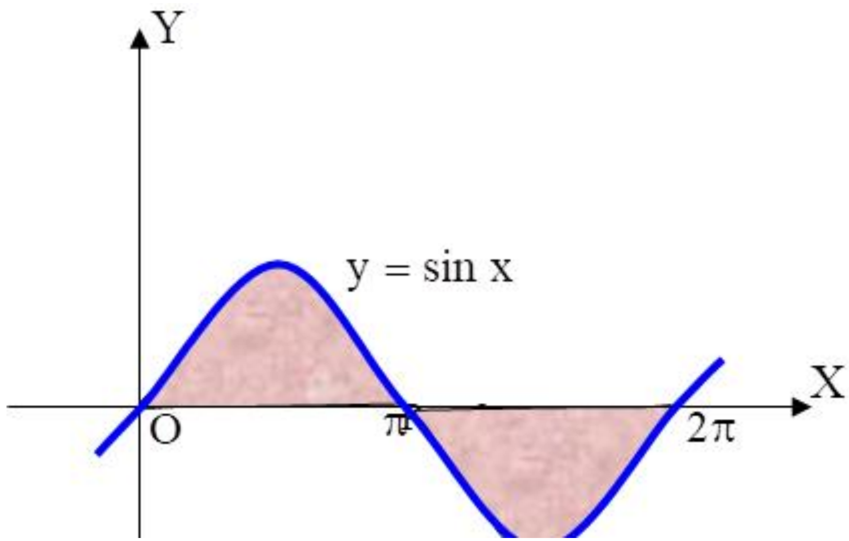
7 - апта.

Анықталған интегралдардың қолданылуы.

Декарттық координаталар және полярлық координаталар жүйесінде берілген фигураның ауданы.

- **Мысал №1.** $y = \sin x$ синусоидасымен және Ox осімен, $0 \le x \le 2\pi$ шектелген облыстың ауданын есепте.

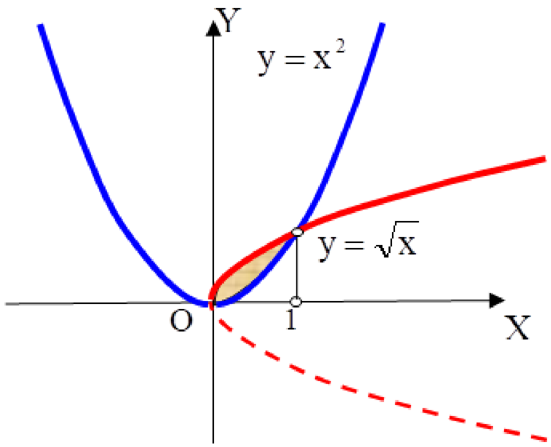


$[0, \pi]$ аралығында $\sin x \ge 0$ және $[\pi, 2\pi]$ аралығында $\sin x \le 0$ болғандықтан, ізделінді аудан

$$S(G) = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -\cos \pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos \pi = 4$$

- **Мысал №2.** $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ параболаларымен шектелген G облысының ауданын тап.



- Теңдеулер жүйесін шешсек: $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^2, \end{cases}$ бұл қисықтардың қиылысу нүктелерін табамыз: $(0,0)$ и $(1,1)$. $[0,1]$кесіндісінде $\sqrt{x}\ge x^2$ теңсіздігі орынды болғандықтан

$$S(G)=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\quad .$$

- **Мысал №3.** Жарты осьтері a және b болатын эллипстің ауданын тап. Эллипстің жоғарғы бөлігі мынадай параметрлік теңдеумен берілген қисық:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

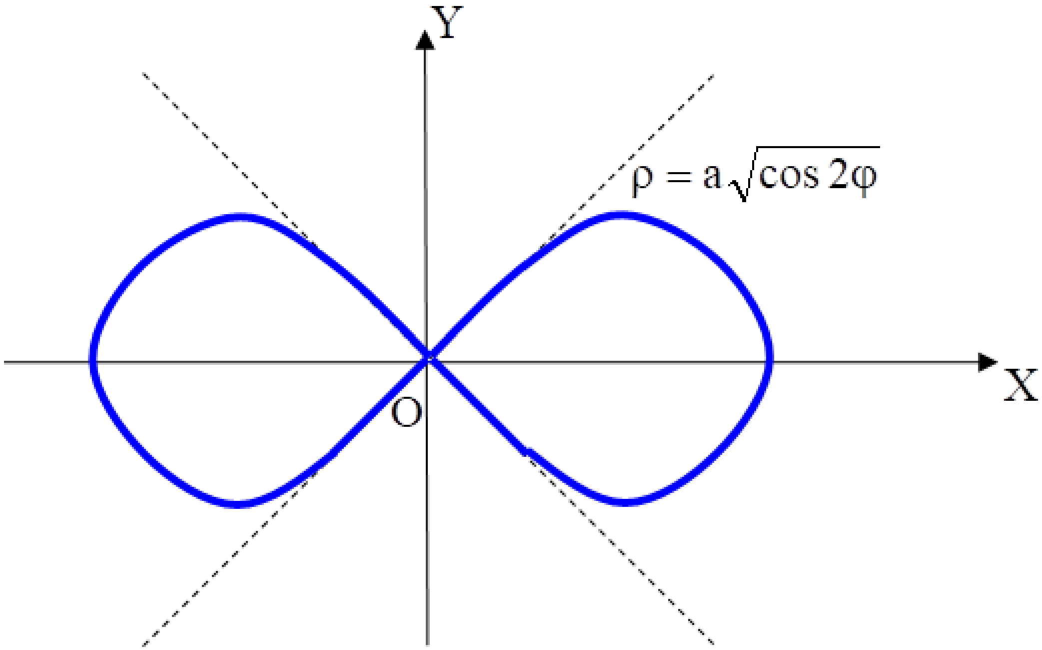
$t = 0$ мәніне $x = a$ мәні, ал $t = \pi$ мәніне $x = -a$ мәні сәйкес келеді, онда бүкіл эллипстің ауданы:

$$S(G) = 2\int_{\pi}^{0} b\sin t(a\cos t)'dt = 2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t dt = 2ab\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} =$$

$$= ab\left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2}\right) - ab \cdot 0 = \pi ab$$

Мысал №4. $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ қисығымен шектелген фигураның ауданын тап.

Бұл қисық *Бернулли лемнискатасы* деп аталады.



- Интегралдау облысын алу үшін $\cos 2\varphi \geq 0$ шартын ескерсек, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ Қисық сызықты үшбұрыштың $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ аралығындағы ауданын табу жеткілікті, яғни, барлық облыстың төрттен бір бөлігінің ауданын табамыз:

$$S(G) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/4} \left(a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2 d\varphi = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} =$$

$$a^2 \sin \frac{\pi}{2} - a^2 \sin 0 = a^2$$

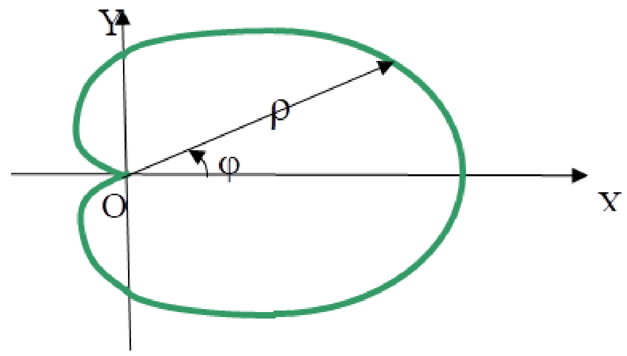
Мысал №5. Параметрлік теңдеумен берілген винттік сызықтың бір орамының ұзындығын тап

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \\ z = bt, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Бұл функцияның туындыларын формулаға қойсақ :

$$I(L) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

- **Мысал №6.** $\rho = a(1+\cos\varphi)\ \ (a>0)$ теңдеуімен берілген кардиоиданың ұзындығын тап



Барлық φ үшін $a(1+\cos\varphi)\geq 0$ болғандықтан:

$$I(L)=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi = 2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi =$$

$$=2a\left(\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi-\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi\right)=4a\left(\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}-\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi}\right)=4a(1+1)=8a$$

Анықталған интегралдың көмегімен айналу денелерінің көлемін есептеу.

Мысал №7. $y = x^2$ функциясының графигімен берілген, мұндағы $x \in [0,1]$ қисық сызықты трапеция Ox осімен айналу кезінде пайда болған дененің көлемін тап. Жоғарыдағы формуланы қолдансақ:

$$V(T) = \pi\int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

Мысал №8. Алдыңғы мысалда берілген функцияның графигі Oy осін айналғанда пайда болған дененің көлемі: $V(T) = 2\pi\int_0^1 x \cdot x^2 dx = 2\pi \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$

Мысал №9. $z = x^2 + y^2$ параболоиданың $z = 1$ жазықтығымен шектелген бөлігінің бетінің ауданын тап. Бұл бет - $y = \sqrt{z}$, мұндағы $z \in [0,1]$ парабола бөлігінің Oz осін айналғанда пайда болатын бет. Сонымен, ізделінді аудан: $S(H) = 2\pi\int_0^1 \sqrt{z}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)^2} dz = 2\pi\int_0^1 \sqrt{z + \frac{1}{4}} dz =$

$$= 2\pi \frac{\left(z + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{4\pi}{3}\left(\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \approx 5{,}33$$